DM de mathématiques n°4

Modèles de croissance de population –

Corrigé

La partie obligatoire est notée sur 16 pts ±4 pts pour le soin et la clarté. La partie facultative est notée sur 4 pts et s'ajoute à ce total, et la note est ramenée à 20 si elle devait dépasser 20.

On s'intéresse dans ce DM à la modélisation d'une croissance démographique d'une population (animale, végétale, cellulaire, humaine...). On notera $y(t)$ la population totale à un instant t. A priori $y(t)$ est donc un nombre entier qui ne varie qu'aux instants où une naissance ou une mort a lieu. Toutefois, si on se place sur une échelle de temps assez grande et qu'on considère que la valeur de $y(t)$ donne (par exemple) le nombre de millions d'individus, on peut considérer que $y(t)$ est un réel, et que y est une fonction réelle.

1 Le modèle de Malthus

Un premier modèle est donné par l'équation $y' = by - dy$ avec $b > 0$ le taux de naissance (par unité de temps) et $d > 0$ le taux de mort. Afin de réduire le nombre de paramètres, on pose $r = b - d$ qui est le taux de natalité ou taux de croissance. On rajoute également une condition initiale :

$$\begin{cases} y' = ry \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad \text{avec } y_0 > 0 \text{ un réel donné}$$

1) Justifier qu'il existe une unique solution à ce problème. Déterminer la solution, qu'on notera encore y. *Puisqu'il y a existence et unicité de la solution, on pourra poser une fonction y et vérifier qu'elle est*
/3 *solution en l'injectant dans le problème.*

> Il s'agit d'un problème de Cauchy (linéaire d'ordre 1), donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution. On pose $y_p(t) = y_0 e^{rt}$. Alors on a bien $y_p'(t) = y_0 r e^{rt} = r y_p(t)$ et par ailleurs $y(0) = y_0$. Ainsi,
>
> $$\boxed{y(t) = y_0 e^{rt}}$$

2) On suppose $b < d$, donc $r < 0$. Que vaut $y(t)$ lorsque t tend vers
/1,5 $+\infty$? Interpréter.

> Comme $r < 0$, on a $y(t) = y_0 e^{rt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.
>
> Le taux de mort étant plus élevé que le taux de naissance, il est naturel que la population s'amenuise au fil du temps.

/1,5 **3)** Même question lorsque $b > d$.

> Comme $r > 0$, on a $y(t) = y_0 e^{rt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.
>
> Le taux de naissance étant plus élevé que le taux de mort, il est naturel que la population croit jusqu'à l'infini.

Pour la petite histoire : ce premier modèle de population a été mis au point par l'économiste britannique Malthus. Il avait appliqué ce modèle à la population humaine et a conclu qu'elle allait croître de façon exponentielle, tandis que les ressources alimentaires n'augmentent qu'arithmétiquement. Cependant, son analyse a suscité moult débats, et a conduit plus tard à l'élaboration de modèles plus réalistes.

2 Le modèle de Verhulst

Le modèle de Malthus repose sur l'hypothèse que le taux de natalité r restera constant au cours du temps. En réalité, lorsque la population devient trop importante et que les ressources de l'environnement viennent à manquer, le taux de mort sera plus élevé à cause d'un effet de compétition pour la survie. Le modèle de Verhulst corrige cela en considérant un nouveau taux de natalité $\widetilde{r}$ qui dépend de y, donnée par : $\widetilde{r}(y) = r \times \left(1 - \dfrac{y}{K}\right)$ avec $K > 0$ une constante donnée. On obtient de facto le modèle suivant :

$$\begin{cases} y' = ry\left(1 - \dfrac{y}{K}\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad \text{avec } y_0 \in]0, K[\text{ un réel donné} \qquad \text{(V)}$$

La valeur de K représente la "capacité" de l'environnement, c'est-à-dire la quantité de ressources renouvelables que peut prodiguer l'environnement pour la survie de l'espèce. Lorsque $y(t) > K$, on a $\tilde{r}(y) < 0$ et la population diminue. Inversement, lorsque $y(t) < K$, on a $\tilde{r}(y) > 0$ de sorte que la population augmente.

On admet que le problème (V) admet une unique solution qu'on notera y dans la suite. De plus, grâce à l'hypothèse $y_0 \in]0, K[$, on admet que pour tout temps $t \geq 0$, on a $y(t) \in]0, K[$.

Pour résoudre (V), on utilise la séparation de variables : pour tout temps $t \geq 0$ et tout temps intermédiaire $s \in [0,t]$, on a

$$\frac{y'(s)}{ry(s)\left(1-\frac{y(s)}{K}\right)} = 1 \qquad \text{donc} \qquad \int_0^t \frac{y'(s)}{ry(s)\left(1-\frac{y(s)}{K}\right)}ds = \int_0^t 1ds$$

4) Montrer que $\displaystyle\int_0^t \frac{y'(s)}{ry(s)\left(1-\frac{y(s)}{K}\right)}ds = \frac{1}{r}\ln\left(\frac{y(t)}{K-y(t)}\right) - \frac{1}{r}\ln\left(\frac{y_0}{K-y_0}\right)$.

/5 On pourra faire un changement de variables.

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{ry(s)\left(1-\frac{y(s)}{K}\right)}ds = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{du}{ru\left(1-\frac{u}{K}\right)} \qquad \begin{cases} u = y(s) \\ du = y'(s)ds \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K}{r}\int_{y_0}^{y(t)} \frac{du}{u(K-u)} \\
&= \frac{K}{r}\int_{y_0}^{y(t)} \left(\frac{1/K}{u} + \frac{1/K}{K-u}\right)du \\
&= \frac{1}{r}\int_{y_0}^{y(t)} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{K-u}\right)du \\
&= \frac{1}{r}\left(\ln y(t) - \ln y_0 - \ln\left(K-y(t)\right) + \ln\left(K-y_0\right)\right) \\
&= \frac{1}{r}\ln\left[\frac{y(t)}{K-y(t)}\right] - \frac{1}{r}\ln\left[\frac{y_0}{K-y_0}\right]
\end{aligned}$$

/3 **5)** En déduire que $y(t) = K\left(1 - \dfrac{1}{1+Ce^{rt}}\right)$ avec $C = \dfrac{y_0}{K-y_0} > 0$.

Par la question précédente, on sait que :

$$\frac{1}{r}\ln\left[\frac{y(t)}{K-y(t)}\right] - \frac{1}{r}\ln(C) = \int_0^t 1ds = t$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
&\ln\left[\frac{y(t)}{K-y(t)}\right] = rt + \ln(C) \\
\Longrightarrow\ &\frac{y(t)}{K-y(t)} = Ce^{rt} \\
\Longrightarrow\ &y(t) = KCe^{rt} - y(t)Ce^{rt} \\
\Longrightarrow\ &(1+Ce^{rt})y(t) = KCe^{rt}
\end{aligned}$$

Or, $C > 0$ donc $1 + Ce^{rt} > 0$, de sorte que

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{KCe^{rt}}{1+Ce^{rt}} \\
&= K\left(\frac{Ce^{rt}+1-1}{1+Ce^{rt}}\right) \\
&= K\left(1 - \frac{1}{1+Ce^{rt}}\right)
\end{aligned}$$

/2 **6)** Quelle est la limite de $y(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$? Interpréter.

Par la question précédente, on a

$$y(t) = K\left(1 - \frac{1}{1+Ce^{rt}}\right)$$

Or, (en supposant $r > 0$), on a $Ce^{rt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, de sorte que $\dfrac{1}{1+Ce^{rt}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. D'où $y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} K$.

Interprétation : avec $r > 0$, la population croit et tend vers la valeur K, qui est la capacité de l'environnement. C'est cohérent puisque le taux de natalité $\widetilde{r}(y) = r\left(1 - \dfrac{y}{K}\right)$ vaut 0 lorsque $y = K$, la population est alors stable.

Note : si $r < 0$, on trouve $y(t) \to 0$, ce qui est là encore naturel. Si $r = 0$, on trouve que

$$\begin{aligned}
y(t) &= K\left(1 - \frac{1}{1+C}\right) = K\left(1 - \frac{1}{1+\frac{y_0}{K-y_0}}\right) = K\left(1 - \frac{1}{\frac{K}{K-y_0}}\right) \\
&= K\left(1 - \frac{K-y_0}{K}\right) = K - (K - y_0) \\
&= y_0
\end{aligned}$$

là encore, le résultat est cohérent : lorsque $r = 0$, le taux de natalité étant nul, la population ne varie pas.

3 Le modèle de Richards (facultatif)

Ophélie est une biologiste : elle aimerait appliquer le modèle de Verhulst pour modéliser la vitesse de croissance d'une plante. Mais elle constate que le taux de croissance $\widetilde{r}(y) = r \times \left(1 - \frac{y}{K}\right)$ de l'équation de Verhulst ne permet pas de "coller" aux données qu'elle a pu recueillir. Ophélie propose le modèle suivant :

$$\begin{cases} y' = ry\left(1 - \left(\frac{y}{K}\right)^\alpha\right) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad \text{avec } y_0 \in]0, K[\text{ et } \alpha > 0 \text{ des réels donnés} \tag{R}$$

Le réel α est une constante qui dépend de l'espèce de la plante considérée. Ophélie est contente de son modèle, mais ne sait pas trop comment résoudre le problème (R). Elle toque à la porte des MPSI en demandant de l'aide... À vous de la lui donner !

Pour simplifier, on prendra $r = K = 1$ dans la suite. On résout donc : $\begin{cases} y' = y(1 - y^\alpha) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ Là encore, on admet qu'il y a existence et unicité d'une solution y définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $]0, K[$, i.e. $]0, 1[$.

7) On décide de faire un changement de fonction inconnue en posant $z = y^\alpha$. Montrer que y est solution de (R) si et seulement si z est solution d'un problème de la forme :

$$\begin{cases} z' = \text{Cste} \times z(1 - z) \\ z(0) = y_0^\alpha \end{cases}$$

/1 avec Cst une constante strictement positive qu'on déterminera en fonction de α.

On pose $z = y^\alpha$. Alors $z' = \alpha y^{\alpha - 1}$. Or,

$$\begin{cases} y' = y(1 - y^\alpha) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} y' \times \alpha y^{\alpha-1} = y(1 - y^\alpha) \times \alpha y^{\alpha-1} \\ y(0)^\alpha = y_0^\alpha \end{cases} \quad \text{car } \alpha y^{\alpha-1} > 0$$

$$\iff \begin{cases} z' = \alpha y^\alpha(1 - y^\alpha) \\ z(0) = y_0^\alpha \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z' = \alpha z(1 - z) \\ z(0) = y_0^\alpha \end{cases}$$

On obtient donc le système voulue avec $\text{Cst} = \alpha > 0$.

/2 **8)** En déduire $z(t)$ pour tout réel $t > 0$.

Puisque y est à valeurs dans $]0, 1[$, on en déduit que $z(t) = y(t)^\alpha \in]0, 1[$. Ainsi, on a $z(t) \neq 0$. Soit $s \in]0, t[$.

$$z'(s) = \alpha z(s)(1 - z(s)) \implies \frac{z'(s)}{z(s)(1 - z(s))} = \alpha$$

On intègre alors cette équation pour s allant de 0 à t :

$$\int_0^t \frac{z'(s)}{z(s)(1 - z(s))} ds = \int_0^t \alpha ds = \alpha t$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{z'(s)}{z(s)(1 - z(s))} ds &= \int_{z(0)}^{z(t)} \frac{du}{u(1 - u)} \qquad \begin{cases} u = z(s) \\ du = z'(s)ds \end{cases} \\ &= \int_{y_0^\alpha}^{z(t)} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1 - u}\right) du \\ &= \left[\ln|u| - \ln|1 - u|\right]_{y_0^\alpha}^{z(t)} \\ &= \ln z(t) - \ln(1 - z(t)) + \ln(y_0^\alpha) - \ln(1 - y_0^\alpha) \\ &= \ln\left[\frac{z(t) y_0^\alpha}{(1 - z(t)) \times (1 - y_0^\alpha)}\right] \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} &\ln\left[\frac{z(t) y_0^\alpha}{(1 - z(t)) \times (1 - y_0^\alpha)}\right] = \alpha t \\ \implies &\frac{z(t) y_0^\alpha}{(1 - z(t)) \times (1 - y_0^\alpha)} = e^{\alpha t} \\ \implies &\frac{z(t)}{1 - z(t)} = \frac{1 - y_0^\alpha}{y_0^\alpha} \times e^{\alpha t} \\ \implies &\frac{z(t) - 1 + 1}{1 - z(t)} = \frac{1 - y_0^\alpha}{y_0^\alpha} \times e^{\alpha t} \\ \implies &-1 + \frac{1}{1 - z(t)} = \frac{1 - y_0^\alpha}{y_0^\alpha} \times e^{\alpha t} \\ \implies &\frac{1}{1 - z(t)} = \frac{1 - y_0^\alpha}{y_0^\alpha} \times e^{\alpha t} + 1 \\ \implies &1 - z(t) = \frac{1}{\frac{1 - y_0^\alpha}{y_0^\alpha} \times e^{\alpha t} + 1} \end{aligned}$$

Finalement,

$$z(t) = \boxed{1 - \frac{1}{\frac{1-y_0^\alpha}{y_0^\alpha} \times e^{\alpha t} + 1}}$$

/0,5 **9)** En déduire finalement que $y(t) = \left(1 - \dfrac{1}{1 + De^{\alpha t}}\right)^{1/\alpha}$ avec $D = \dfrac{y_0^\alpha}{1 - y_0^\alpha} > 0$.

On sait que $y(t)^\alpha = z(t)$, de sorte que $y(t) = z(t)^{1/\alpha}$. Par la question précédente, on a donc

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(1 - \frac{1}{\frac{1-y_0^\alpha}{y_0^\alpha} \times e^{\alpha t} + 1}\right)^{1/\alpha} \\ &= \boxed{\left(1 - \frac{1}{1 + De^{\alpha t}}\right)^{1/\alpha}} \end{aligned}$$

Un peu de concret ! Vous pouvez consulter les graphes des solutions des problèmes (V) et (R) grâce au lien suivant : `https://www.desmos.com/calculator/hdhs8mcry1?lang=fr`.

/0,5 **10)** Observer le rôle de α sur le graphe de la solution de (R). Donner une interprétation en lien avec le rôle de α pour la fonction $\widetilde{r}(y) = r \times \left(1 - \dfrac{y^\alpha}{K^\alpha}\right)$, que l'on peut visualiser avec le lien suivant :

`https://www.desmos.com/calculator/gapox64nx5?lang=fr`

— Lorsque α tend vers 0, on observe que la croissance de y est d'autant plus lente. C'est cohérent dans le sens où le taux de natalité $\widetilde{r}$ se rapproche de la fonction nulle lorsque α tend vers 0.

— De même, lorsque α tend vers $+\infty$, on observe que la croissance de y est d'autant plus rapide. C'est cohérent dans le sens où le taux de natalité $\widetilde{r}$ se rapproche de la fonction constante égale à 1 lorsque α tend vers $+\infty$. Plus précisément, puisque $\tilde{r}(y)$ se rapproche de 1, la fonction $t \mapsto y(t)$ se rapproche de la fonction $t \mapsto e^{rt}$.